# MOVIMIENTO PARABÓLICO

Un cuerpo posee movimiento parabólico cuando es lanzado desde la superficie terrestre formando cierto ángulo con la horizontal. El movimiento parabólico se compone de dos movimientos:

- Movimiento de la componente horizontal: es un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante.
- Movimiento de la componente vertical: es un movimiento rectilíneo acelerado afectado por la gravedad.

Para el movimiento parabólico también se cumple el principio de Galileo: “Cuando un cuerpo es sometido simultáneamente a dos movimientos, cada uno de éstos se cumple independientemente.”

## NOMENCLATURA A UTILIZAR

$$x = distancia\ recorrida\ horizontal$$
$$y = distancia\ recorrida\ (altura)$$
$$a = g = aceleración\ de\ la\ gravedad$$
$$v_{ox} = velocidad\ inicial\ horizontal$$
$$v_x = velocidad\ horizontal$$
$$v_{oy} = velocidad\ inicial\ vertical$$
$$v_y = velocidad\ vertical$$
$$v_o = velocidad\ inicial$$
$$t = tiempo$$

**LA VELOCIDAD INICIAL $v_o$**

Como el cuerpo es lanzado con un ángulo de inclinación $\theta$, como se observa en la figura 1, la velocidad inicial $v_o$, se descompone en las direcciones horizontal $v_{ox}$ y vertical $v_{oy}$ del plano cartesiano.

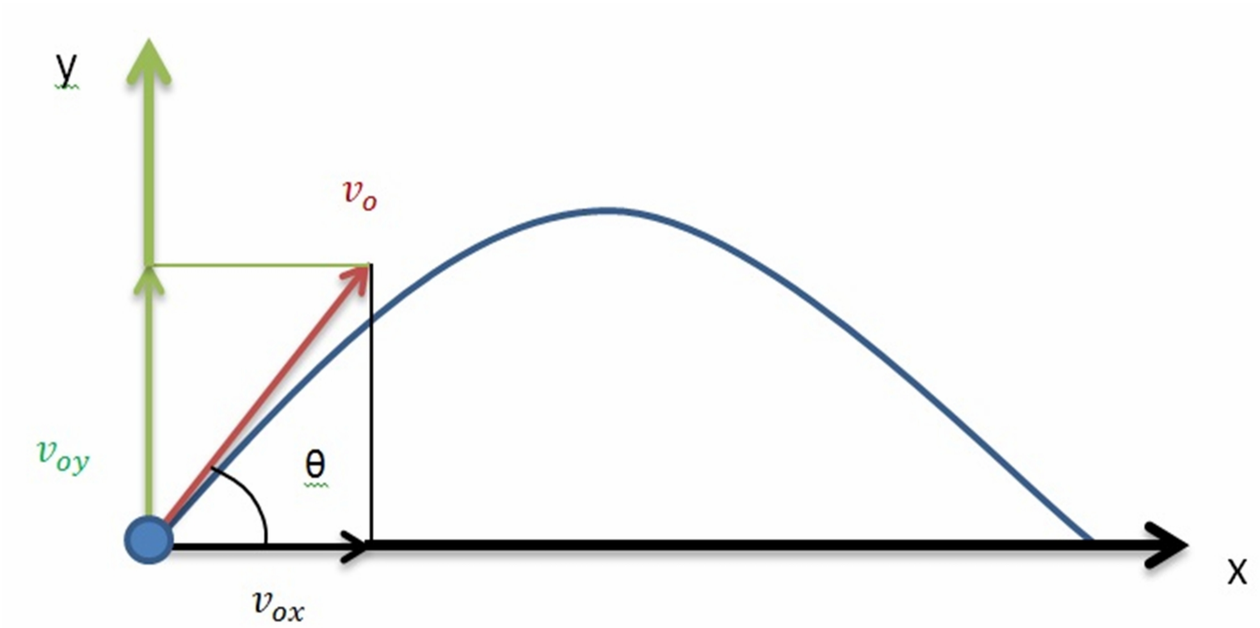



FIGURA 1. DESCOMPOSICIÓN DE LA VELOCIDAD INICIAL.

Aplicando la descomposición vectorial se obtiene:

$$v_{ox} = v_o Cos\theta \quad \textbf{E.1}$$ Componente horizontal de la velocidad inicial

$$v_{oy} = v_o Sen\theta \quad \textbf{E.2}$$ Componente vertical de la velocidad inicial

**DIMENSIONES DEL MOVIMIENTO**

El alcance máximo horizontal, la altura máxima y el tiempo total de vuelo son las dimensiones principales que permiten describir en forma general el comienzo y el fin del movimiento parabólico.

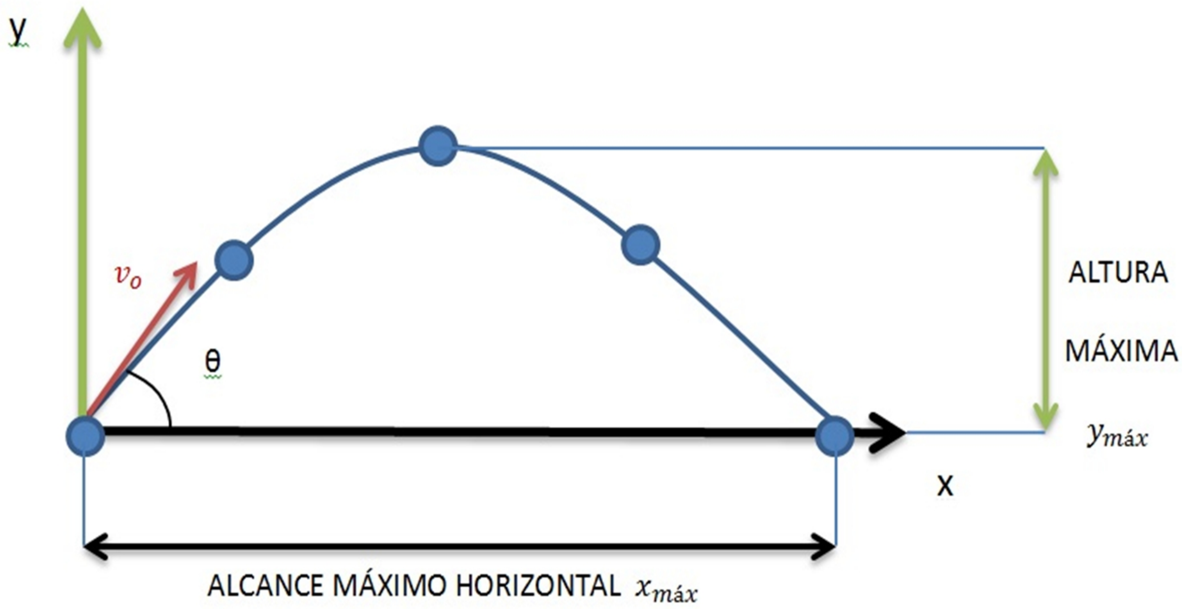



FIGURA 2. DIMENSIONES PRINCIPALES DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO.

Para calcular las dimensiones principales del movimiento se utilizan las siguientes ecuaciones:

- Alcance máximo horizontal

$$\boldsymbol{x_{n\,\text{áx}} = \frac{v_o^2 Sen(2\theta)}{g}} \qquad \textbf{E.3}$$

- Altura máxima

$$\boldsymbol{y_{n\,\text{áx}} = \frac{v_o^2 Sen^2(\theta)}{2g}} \qquad \textbf{E.4}$$

- Tiempo total de vuelo

$$\boldsymbol{t_{vuelo} = \frac{2v_o Sen(\theta)}{g}} \qquad \textbf{E.5}$$

La aceleración de la gravedad es: $a = g = 9{,}8\ {}^{m}/_{s^2}$

**COMPORTAMIENTO DE LA VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO PARABÓLICO**

La figura 3, describe el comportamiento de la velocidad en las diferentes posiciones de la partícula durante el movimiento. Como se puede observar en cada posición la partícula posee una velocidad horizontal y una velocidad vertical las cuales se describen a continuación.

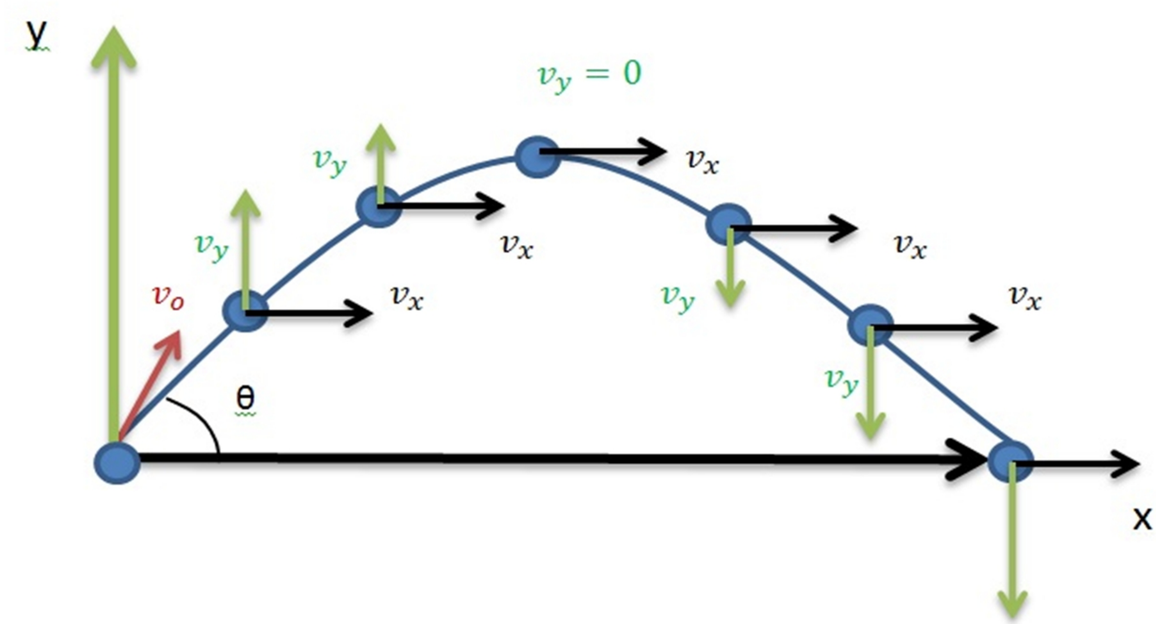



FIGURA 3. COMPORTAMIENTO DE LA VELOCIDAD

- **Velocidad horizontal:** como el movimiento horizontal es con velocidad constante **la velocidad $v_x$ no cambia durante todo el movimiento** y se calcula con la ecuación E.1.

$$v_{ox} = v_x = v_o Cos\theta \quad \text{E.1}$$

- **Velocidad Vertical:** como el movimiento vertical es rectilíneo acelerado afectado por la gravedad **la velocidad vertical cambia en cada posición.** En este caso se aplica la ecuación de caída libre:

$$v_y = v_{oy} - gt$$

Pero como $v_{oy} = v_o Sen\theta$ entonces:

$$\boldsymbol{v_y = v_o Sen(\theta) - gt} \quad \textbf{E.6}$$

La ecuación E.6 permite calcular la velocidad vertical en cualquier posición del movimiento.

**DISTANCIA HORIZONTAL (x) Y ALTURA (y) EN CUALQUIER POSICIÓN DEL MOVIMIENTO**

A medida que la partícula describe una trayectoria parabólica al ser lanzada con un ángulo de inclinación ocupa una coordenada (x,y) con respecto al plano cartesiano.

- Para calcular la distancia horizontal en cualquier posición se utiliza la ecuación:

$$x = v_x t$$

Pero como $v_x = v_o Cos(\theta)$ entonces:

$$\boldsymbol{x = (v_o Cos\theta) * t} \qquad \textbf{E.7}$$

- Para calcular la altura en cualquier posición se utiliza la ecuación:

$$y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Pero como $v_{oy} = v_o Sen(\theta)$ entonces:

$$\boldsymbol{y = (v_o Sen\theta)(t) - \frac{1}{2} g t^2} \qquad \textbf{E.8}$$

**DIAGRAMA DEL MOVIMIENTO PARA RESOLVER PROBLEMAS**

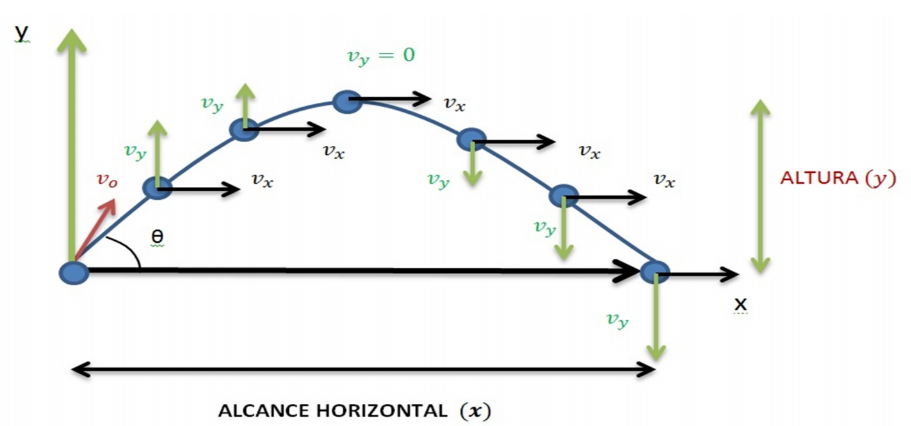
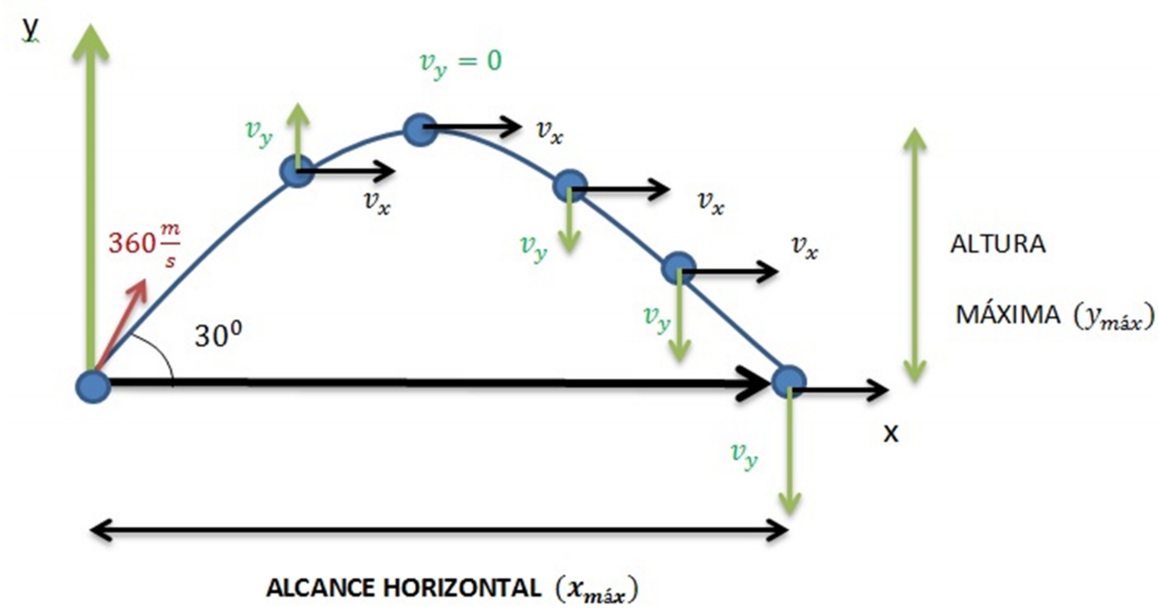



FIGURA 4. DIAGRAMA DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO

**PROBLEMA 1.** Un cañón dispara un proyectil con una velocidad inicial de $360\frac{m}{s}$ y un ángulo de inclinación de $30^0$. Calcular:

a) Alcance máximo horizontal
b) Altura Máxima
c) Tiempo total de vuelo
d) Posición y velocidad a los 11 segundos

Paso 1. Leer atentamente el problema, mínimo 3 veces, con el objetivo de entender de qué se trata y realizar la gráfica con los datos.




Paso 2. Extraer los datos del problema y revisar las unidades.

$v_o = 360\frac{m}{s}$ $\quad\theta = 30^0$ $\quad x_{máx} = ?$ $\quad y_{máx} = ?$ $\quad t_{vuelo} = ?$ $\quad g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$

En este caso no es necesario realizar ninguna conversión ya que las unidades de longitud y de tiempo son las mismas.

Paso 3. Como se conoce la velocidad inicial, el ángulo de lanzamiento y la gravedad se pueden calcular las partes a,b y c del problema.

- Para la parte (a) se utiliza la ecuación E.3:

$$x_{n\,áx} = \frac{v_o^2 Sen(2\theta)}{g}$$ **E.3** se calcula el alcance máximo horizontal

$$x_{máx} = \frac{\left(360\,\frac{m}{s}\right)^2 Sen(2(30^0))}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}$$

$$x_{máx} = \frac{\left(129600\,\frac{m^2}{s^2}\right) Sen(60^0)}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}$$

$$x_{máx} = \frac{\left(112236{,}89\,\frac{m^2}{s^2}\right)}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 11452{,}74\;m$$

- La parte (b) se soluciona con la ecuación E.4

$$y_{n\,áx} = \frac{v_o^2 Sen^2(\theta)}{2g} \qquad \textbf{E.4} \quad \text{Se calcula la altura máxima}$$

$$y_{máx} = \frac{\left(360\,\frac{m}{s}\right)^2 \;\; \mathrm{Sen}^2(30^0)}{2\left(9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right)}$$

$$y_{n} \quad = \frac{\left(129600\,\frac{m^2}{s^2}\right) \;\; \mathrm{Sen}^2(30^0)}{2\left(9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right)}$$

$$y_{máx} = \frac{\left(129600\,\frac{m^2}{s^2}\right) \;\; (0{,}25)}{2\left(9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right)}$$

$$y_{máx} = \frac{\left(32400\,\frac{m^2}{s^2}\right)}{2\left(9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right)} = 1653{,}06\;m$$

- El tiempo total de vuelo de la parte (c) se calcula con la ecuación E.5

$$t_{vuelo} = \frac{2v_o Sen(\theta)}{g} \qquad \textbf{E.5}$$

$$t_{vuelo} = \frac{2\left(360\frac{m}{s}\right)\mathrm{Sen}(30^0)}{9{,}8\frac{m}{s^2}}$$

$$t_{vuelo} = \frac{2\left(360\frac{m}{s}\right)(0{,}5)}{9{,}8\frac{m}{s^2}} = 36{,}73\ seg$$

**Es importante tener en cuenta que las ecuaciones E.3, E.4 y E.5 se utilizan solamente para calcular las dimensiones máximas del movimiento.**

- Para la parte (d), como se trata de una posición diferente al inicio y al final del movimiento se utilizan las ecuaciones de posición E.1,E.2, E.6, E.7 y E.8.

$$v_o = 360\frac{m}{s} \qquad \theta = 30^0 \qquad t_{11} = 11\ seg \qquad g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$$

Cuando el problema hace referencia a una posición, velocidad o tiempo determinado se siguen los siguientes pasos.

1. Descomponer la velocidad inicial $v_o = 360\frac{m}{s}$ en sus componentes horizontal y vertical con las ecuaciones E.1 y E.2. (Ver figura 2).

$$v_{ox} = v_o Cos\theta \qquad \textbf{E.1}$$

$v_{ox} = 360\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{Cos}(30^0) = 311{,}76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ velocidad inicial horizontal

$$v_{oy} = v_o Sen\theta \qquad \textbf{E.2}$$

$v_{oy} = 360\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{Sen}(30^0) = 180\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ velocidad inicial vertical

2. Como se conoce el tiempo $t_{11} = 11\ seg$, y las componentes de la velocidad inicial se puede calcular la distancia horizontal (x) y la altura (y), para esto se utiliza las ecuaciones E.7 y E.8.

Distancia horizontal

$$x = (v_o Cos\theta) * t \qquad \textbf{E.7}$$

$x = 311{,}76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} * (11\ \mathrm{seg}) = 3429{,}36\ \mathrm{m}$ distancia horizontal a los 11 seg

Altura

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{v_o Sen\theta})(\boldsymbol{t}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{gt^2} \qquad \textbf{E.8}$$

$$\boldsymbol{y} = (180\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})(11\ \mathrm{seg}) - \frac{1}{2}\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(11\ \mathrm{seg})^2$$

$$\boldsymbol{y} = 1980\ \mathrm{m} - \frac{1}{2}\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(121\ \mathrm{seg}^2)$$

$$\boldsymbol{y} = 1980\ \mathrm{m} - 592{,}9\ \mathrm{m} = 1387{,}1\ m \qquad \text{altura a los 11 segundos}$$

3. Para calcular la velocidad a los $t_{11} = 11\ seg,$ se utilizan las ecuaciones E.1 y E.6.

Velocidad horizontal a los 11 segundos. (Ver figura 3).

$$\boldsymbol{v_{ox}} = \boldsymbol{v_x} = \boldsymbol{v_o Cos\theta} \qquad \textbf{E.1}$$

$$\boldsymbol{v_{ox}} = \boldsymbol{v_x} = 360\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{Cos}(30^0) = 311{,}76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Velocidad vertical a los 11 segundos (Ver figura 3).

$$\boldsymbol{v_y} = \boldsymbol{v_o Sen(\theta)} - \boldsymbol{gt} \qquad \textbf{E.6}$$

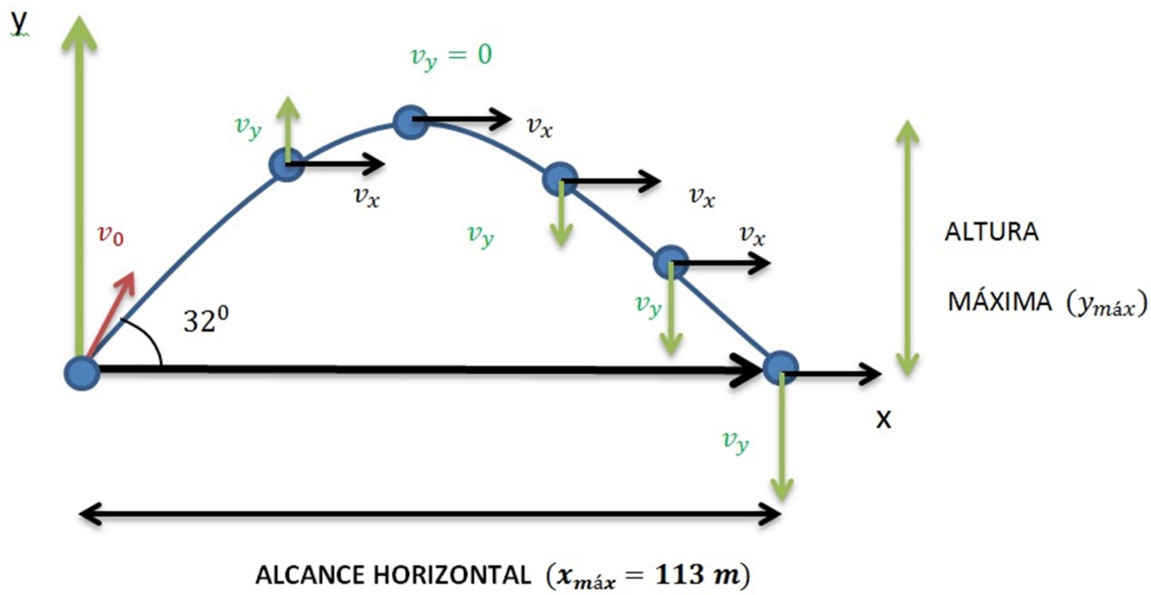
$$\boldsymbol{v_y} = 180\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(11\ \mathrm{seg})$$

$$\boldsymbol{v_y} = 180\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 107{,}8\ \frac{m}{s} = 72{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

**PROBLEMA 2.** Un proyectil sale disparado desde el suelo con un ángulo de $32^0$ y cae en un punto situado a $113\ m$ del sitio de lanzamiento. Calcular:

a) La velocidad inicial con la que fue lanzado el proyectil.
b) Tiempo, altura y velocidad a los 90 m del sitio de lanzamiento.

Paso 1. Leer atentamente el problema, mínimo 3 veces, con el objetivo de entender de qué se trata y realizar la gráfica con los datos.




Paso 2. Extraer los datos del problema y revisar las unidades.

$$v_o = ? \qquad \theta = 32^0 \qquad g = 9{,}8\frac{m}{s^2} \quad x_{máx} = 113\ m$$

En este caso no es necesario realizar ninguna conversión ya que las unidades de longitud y de tiempo son las mismas.

Paso 3. Para la parte (a) como se conoce el alcance máximo horizontal $x_{máx}$ y el ángulo de lanzamiento $\theta = 32^0$ con la ecuación E.3 se calcula la velocidad inicial $v_o$.

$$x_{máx} = \frac{v_o^2 Sen(2\theta)}{g}$$ **E.3** despejar la velocidad inicial

$$g x_{máx} = v_o^2 Sen(2\theta)$$

$$\frac{g x_{máx}}{Sen(2\theta)} = v_o^2$$

$$v_o = \sqrt{\frac{g x_{máx}}{Sen(2\theta)}}$$ entonces $$v_o = \sqrt{\frac{\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(113\ m)}{Sen(2(32^0))}}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{1107{,}4\frac{m^2}{s^2}}{Sen((64^0))}} = 35{,}10\frac{m}{s}$$

Para la parte (b), como se trata de una posición diferente al inicio y al final del movimiento se utilizan las ecuaciones de posición E.1,E.2, E.6, E.7 y E.8.

$$v_o = 35{,}10\ \frac{m}{s} \qquad \theta = 32^0 \quad x = 90\ m \qquad t = ? \qquad g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$$

Cuando el problema hace referencia a una posición, velocidad o tiempo determinado se siguen los siguientes pasos.

1. Descomponer la velocidad inicial $v_o = 35{,}10\frac{m}{s}$ en sus componentes horizontal y vertical con las ecuaciones E.1 y E.2. (Ver figura 2).

$\boldsymbol{v_{ox} = v_o Cos\theta}$ **E.1**

$v_{ox} = 35{,}10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{Cos}(32^0) = 29{,}76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ velocidad inicial horizontal

$\boldsymbol{v_{oy} = v_o Sen\theta}$ **E.2**

$v_{oy} = 35{,}10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{Sen}(32^0) = 18{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ velocidad inicial vertical

2. Como se conoce la distancia horizontal $x = 90\ m$, y las componentes de la velocidad inicial se puede calcular el tiempo y la altura (y) utilizando las ecuaciones E.7 y E.8.

Cálculo del tiempo

$\boldsymbol{x = (v_o Cos\theta) * t}$ **E.7** despejar el tiempo

$\frac{x}{(v_o Cos\theta)} = t$ entonces $t = \frac{90\ m}{\left(29{,}76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}$

$t = 3{,}02\ seg$ tiempo a los 90 m de distancia horizontal

La altura a los 90 m de distancia horizontal

$\boldsymbol{y = (v_o Sen\theta)(t) - \frac{1}{2}gt^2}$ **E.8**

$$\boldsymbol{y} = \left(18{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(3{,}02\ \text{seg}) - \frac{1}{2}\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(3{,}02\ \text{seg})^2$$

$$\boldsymbol{y} = 56{,}17\ \text{m} - \frac{1}{2}\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(9{,}12\ \text{seg}^2)$$

$$\boldsymbol{y} = 56{,}17\ \text{m} - 44{,}68\ \text{m} = 11{,}49\ m$$

3. Para calcular la velocidad cuando $x = 90\ m,$ se utilizan las ecuaciones E.1 y E.6.

Velocidad horizontal (Ver figura 3).

$$\boldsymbol{v_{ox}} = \boldsymbol{v_x} = \boldsymbol{v_o Cos\theta} \qquad \textbf{E.1}$$

$$\boldsymbol{v_{ox}} = \boldsymbol{v_x} = 35{,}10\frac{\text{m}}{\text{s}}\text{Cos}(32^0) = 29{,}76\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Velocidad vertical (Ver figura 3).

$$\boldsymbol{v_y} = \boldsymbol{v_o Sen(\theta) - gt} \qquad \textbf{E.6}$$

$$\boldsymbol{v_y} = 18{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(3{,}02\ \text{seg})$$

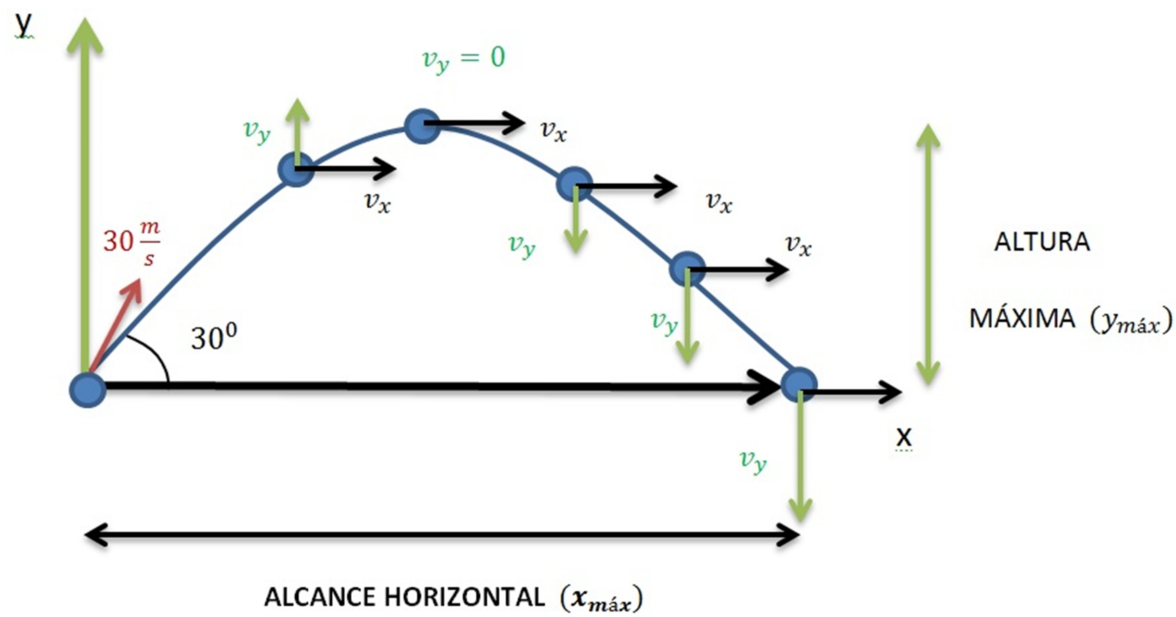
$$\boldsymbol{v_y} = 18{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}} - 29{,}59\frac{m}{s} = -11\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El signo (–) indica que la dirección de la velocidad es hacia abajo.

**PROBLEMA 3.** Una pelota de béisbol sale golpeada por el bate con una velocidad de $30\frac{m}{s}$ a un ángulo de $30^0$. Calcular:

a) Tiempo total de vuelo
b) Velocidad a los 2 segundos de vuelo

Paso 1. Leer atentamente el problema, mínimo 3 veces, con el objetivo de entender de qué se trata y realizar la gráfica con los datos.




Paso 2. Extraer los datos del problema y revisar las unidades.

$$v_o = 30\frac{m}{s} \qquad \theta = 30^0 \qquad g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$$

En este caso no es necesario realizar ninguna conversión ya que las unidades de longitud y de tiempo son las mismas.

Paso 3. Como se conoce la velocidad inicial $v_o = 30\frac{m}{s}$ y el ángulo de lanzamiento $\theta = 30^0$ el tiempo total de vuelo de la parte (a) se calcula con la ecuación E.5.

$$\boldsymbol{t_{vuelo}} = \frac{\boldsymbol{2v_oSen(\theta)}}{\boldsymbol{g}} \qquad \textbf{E.5}$$

$$\boldsymbol{t_{vuelo}} = \frac{2\left(30\frac{m}{s}\right)\text{Sen}(30^0)}{9{,}8\frac{m}{s^2}}$$

$$\boldsymbol{t_{vuelo}} = \frac{2\left(30\frac{m}{s}\right)(0{,}5)}{9{,}8\frac{m}{s^2}} = 3{,}06\ seg$$

Cuando el problema hace referencia a una posición, velocidad o tiempo determinado se siguen los siguientes pasos.

1. Descomponer la velocidad inicial $v_o = 35{,}10\frac{m}{s}$ en sus componentes horizontal y vertical con las ecuaciones E.1 y E.2. (Ver figura 2).

$$\boldsymbol{v_{ox} = v_o Cos\theta} \qquad \textbf{E.1}$$

$\boldsymbol{v_{ox}} = 30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \mathrm{Cos}(30^0) = 26\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ velocidad inicial horizontal

$$\boldsymbol{v_{oy} = v_o Sen\theta} \qquad \textbf{E.2}$$

$\boldsymbol{v_{oy}} = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \mathrm{Sen}(30^0) = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ velocidad inicial vertical

2. Para calcular la velocidad cuando $t = 2\ seg$, se utilizan las ecuaciones E.1 y E.6.

Velocidad horizontal (Ver figura 3).

$$\boldsymbol{v_{ox} = v_x = v_o Cos\theta} \qquad \textbf{E.1}$$

$$\boldsymbol{v_{ox}} = \boldsymbol{v_x} = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \mathrm{Cos}(30^0) = 26\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Velocidad vertical (Ver figura 3).

$$\boldsymbol{v_y} = \boldsymbol{v_o Sen}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{gt} \qquad \textbf{E.6}$$

$$\boldsymbol{v_y} = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(2\ \mathrm{seg})$$

$$\boldsymbol{v_y} = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 19{,}6\frac{m}{s} = -4{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

El signo (–) indica que la dirección de la velocidad es hacia abajo.